

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ЕМКОСТНОГО РАЗРЯДА

В.Ю. Чебакова, В.С. Желтухин

*Казанский национальный исследовательский технологический
университет,*

Казанский (Приволжский) федеральный университет

E-mail: vchebakova@mail.ru

Аннотация

Проведен анализ математических моделей, а также данных экспериментальных исследований высокочастотного емкостного (ВЧЕ) разряда. В настоящее время созданы и исследованы модели, подробно описывающие свойства ВЧЕ-разрядов при межэлектродных расстояниях порядка 3-5 см. При таких межэлектродных расстояниях нагрев газа не играет существенной роли в балансе рождения и гибели заряженных частиц в разряде. Свойства ВЧЕ-разряда при больших межэлектродных расстояниях (больших 10 см) практически не исследованы. При таких расстояниях существенную роль в поддержании разряда играет нагрев газа. Существующие модели не учитывают потери энергии на возбуждение атомов и нагрев газа. Кроме того, они неприменимы в случае сильных полей, так в этом случае частота ионизации монотонно нарастает с ростом отношения напряженности электрического поля к давлению, тогда как в очень сильных полях ионизационная способность с ростом поля падает. В связи с этим для определения диапазона устойчивого горения ВЧЕ-разряда пониженного давления в плазмотроне с большим межэлектродным расстоянием математическую модель необходимо дополнить уравнениями, учитывающими перенос энергии электронами и нагрев газа.

Ключевые слова: математическая модель, высокочастотный емкостный разряд, низкотемпературная плазма, большое межэлектродное расстояние, конечно-разностный метод

Введение

В последнее время устройства, использующие низкотемпературную плазму, интенсивно внедряются в промышленность и в повседневную жизнь. Плазма эффективно используется в области нанотехнологий, для создания и модификации наноструктур (например, для обработки материалов

с целью повышения срока службы и надежности изделий в машиностроении, создания легких и прочных полимерных композиционных материалов, полиэтиленпластиков, получения нанодисперсионных порошков, металлов и соединений и т.д.) [1–10]. Большой интерес представляет также изучение процессов взаимодействия высокочастотной (ВЧ) плазмы пониженного давления с многослойным материалом. Это и исследование стойкости тонкопленочных пластиковых материалов, используемых для формирования систем изоляции, к действию электрических разрядов [11], и проблемы согласования энергетических параметров отдельных контактирующих слоев в многослойных устройствах типа органических электролюминесцентных диодов [12], а также модификация различных полимерных и композитных материалов [13–15].

Преимуществом плазменных методов обработки материалов является широкий диапазон параметров воздействия. Различные материалы и различные виды обработки требуют, соответственно, и различных условий поддержания разряда. Некоторые материалы (например, углеродистые и низколегированные стали, полимеры) не выдерживают высокой температуры, поэтому для их обработки необходимо применять, так называемую "холодную плазму", с газовой температурой не более 500 К. Одним из эффективных методов создания "холодной плазмы" является высокочастотный емкостной (ВЧЕ) разряд пониженного давления. Существуют различные конструкции ВЧЕ-плазмотронов – с кольцевыми и плоскими электродами. Первые чаще всего используются для создания плазменной струи. ВЧЕ-плазмотроны с плоскими электродами применяются для обработки материалов непосредственно в разряде. Межэлектродное расстояние, как правило, находится в диапазоне от 0.02 до 0.1 м [16–26], поэтому их используют либо для обработки небольших изделий, либо в плазмохимических процессах. Результаты экспериментальных исследований показали, что ВЧЕ-разряд эффективно применяется для модификации натуральных полимерных материалов, таких, как кожа, ткани, мех. Отличительной особенностью такой обработки является большие размеры образцов ($\sim 1 \text{ м}^2$) и

партионность, т.е. обработка одновременно нескольких образцов (партии). Это требует разработки плазмотронов с большими размерами электродов ($\sim 0.5 \times 1.4 \text{ м}^2$) и большим межэлектродным расстоянием ($\sim 0.2 - 0.3 \text{ м}$). Разряд при больших межэлектродных расстояниях ($d > 0.2 \text{ м}$) существенно отличается от разряда при межэлектродных расстояниях $0.01 \div 0.1 \text{ м}$.

В настоящее подробно исследованы модели ВЧ-разряда при средних и низких давлениях и при межэлектродных расстояниях $d = 0.02 \div 0.1 \text{ м}$ [27–31]. Оценки элементарных процессов в плазме ВЧ-разрядов пониженного давления показывают, что длина свободного пробега электронов l_e не превышает 10^{-3} м , толщина дебаевского слоя $\lambda_d \cong 10^{-5} \text{ м}$, толщина слоя положительного заряда $\cong 10^{-3} \text{ м}$. Таким образом, толщина приэлектродного слоя много меньше амбиполярной области [16].

Характерной особенностью ВЧЕ-разрядов является наличие двух сильно отличающихся форм горения ВЧЕ-разрядов – это α - и γ -режимы, отличающиеся процессами в приэлектродной области. Исследования, проведенные в работе [32], показывают, что характеристики ВЧЕ-разряда определяются в первую очередь приэлектродными слоями. Процессы, протекающие в приэлектродных слоях, обеспечивает широкий диапазон возможных видов модификации поверхностей материалов органической и неорганической природы. Чаще всего нагрев газа не играет существенной роли в балансе рождения и гибели заряженных и метастабильных частиц в разряде, поэтому в [29, стр. 54-60] в модели учитываются только процессы, описываемые следующими краевыми и начально- краевыми задачами: для электронной концентрации, ионной концентрации и уравнения Пуассона. При этом для описания ионизационного коэффициента используется формула Таунсенда, которая, согласно [33,34], не учитывает потери энергии на возбуждение атомов и нагрев газа. Кроме того, эта модель не применима в случае сильных полей, так в этом случае частота ионизации монотонно нарастает с ростом отношения напряженность/давление, тогда как в очень сильных полях ионизационная способность с ростом поля падает.

При больших межэлектродных расстояниях существенным является тот

факт, что в указанном режиме поддержания ВЧ-разряд является диффузным, и для полного описания разряда нужно рассматривать нагрев газа и электронную температуру, а также концентрацию метастабильных атомов. Действительно, согласно [35–43] энергия метастабильных и резонансных состояний достаточна для того, чтобы через различные процессы возбуждения и девозбуждения метастабильных атомов, а также процессы ступенчатой и ионизации влиять на нагрев газа и изменение электронной температуры. Поэтому при построении модели необходимо учитывать зависимость транспортных коэффициентов от температуры.

Возникающая при этом система дифференциальных уравнений является нелинейной. Решению нелинейных задач посвящена обширная литература (см., например, [44–50]), однако при решении задач моделирования ВЧЕ-разрядов необходимо учитывать особенности этих задач.

1. Экспериментальные исследования ВЧ-разрядов

Разработка специальных установок, настроенных на работу в определенных режимах, связана с проведением большого количества экспериментальных исследований по подбору параметров плазменных установок. В работе [51] экспериментально исследованы характеристики емкостного ВЧ-разряда в диапазоне частот 80–90 МГц в газовой смеси $\text{CO}_2 : \text{N}_2 : \text{He} : \text{Xe}$ при давлении 90 Тор. Показано, что слои разряда в α -режимах могут описываться эквивалентным конденсатором. Получена связь между емкостью такого конденсатора и физическими параметрами слоя. В [52] рассматриваются результаты экспериментального исследования оптической однородности потока газа с ВЧ-разрядом. Исследования проводились методом двухэкспозиционной голографической интерферометрии. Емкостный ВЧ-разряд с частотой поля 1.76 МГц поддерживался между двумя плоскими охлаждаемыми электродами, отстоящими друг от друга на расстояние 0.03 м (рабочая среда $\text{CO}_2 : \text{N}_2 : \text{He}$, давление 13.5 кПа). В [32] разряд зажигался между плоскими алюминиевыми электродами диаметром 0.15 м, межэлектродное расстояние в большинстве опытов составляло 0.08 м, частота ВЧ-генератора 13.56 МГц. Эксперименты проводились в аргоне, кислоро-

де, метане, хлоре, смесях $\text{Ar} : \text{Cl}_2$, $\text{CH}_4 : \text{H}_2$ при давлениях $p = 0.1 \div 10$ Па. Показано, что характеристики разряда определяются в первую очередь приэлектродными слоями. В [53] приведены результаты эксперименты по исследованию потоков электронов и ионов, бомбардирующих электроды в ВЧЕ-разряде в аргоне при давлениях $p = 15 \div 30$ мТор. Показано, что поток быстрых электронов, образующихся за счет вторичной эмиссии, сравним с потоком ионов на электрод. Энергия быстрых электронов в несимметричном разряде около большого электрода значительно превышает ионную и достигает 1000 эВ. В [54] эксперименты проводились при давлениях аргона $p = 0.01 \div 10$ Тор в диапазоне ВЧ-напряжений, меньших 1000 В, и частоте поля 13.56 МГц. Расстояние между плоскими параллельными электродами из нержавеющей стали диаметром 0.1 м изменялось в диапазоне $0.06 \div 0.054$ м. Получено, что область устойчивого существования α -режима ВЧ-разряда ограничена не только со стороны средних давлений, но и со стороны низких давлений. Показано, что при низких давлениях $\alpha - \gamma$ -переход ВЧ-разряда в аргоне происходит скачком и имеет гистерезисный характер. При промежуточных давлениях α - γ -переход происходит непрерывно, без скачков. Обсуждается роль стохастического (бесстолкновительного) нагрева электронов в поддержании ВЧ-разряда при промежуточных давлениях газа. В [55] емкостный разряд зажигался при частотах ВЧ-поля 13.56 МГц и 27.12 МГц. Эксперименты проводились в аммиаке в диапазоне давлений $0.04 \div 6$ Тор при расстоянии между электродами 0.02 м. В указанной работе представлены вольт-амперные характеристики слабо-точного режима ВЧ-разряда в аммиаке для частот ВЧ-поля 13.56 МГц и 27.12 МГц. Получено, что только аномальный режим горения наблюдается при низких давлениях, когда рост тока сопровождается повышением ВЧ-напряжения с полным покрытием разрядом площади электродов. Нормальный режим появляется при более высоких давлениях газа, когда рост тока происходит при увеличении площади, занимаемой разрядом на электродах. Разряд горит в аномальном режиме после полного покрытия поверхности электродов. Получено, что нормальная плотность тока увели-

чивается с повышением давления газа и частоты ВЧ-электрического поля. В работе [56] представлены результаты экспериментального исследования ВЧ-емкостного разряда в SF_6 , NF_3 и SiH_4 низкого давления. Показано, что ВЧ-разряд в этих газах может существовать не только в слаботочной (α -) и сильноточной (γ -) модах, но и в диссоциативной δ -моды. Эта δ -мода характеризуется высокой степенью диссоциации молекул газа, высокими плотностью плазмы, температурой электронов и активным током разряда, и является промежуточной между α - и γ -модами. Причиной появления δ -моды является резкое увеличение скорости диссоциации молекул газа электронным ударом, начиная с некоторой пороговой величины ВЧ напряжения. При этом пороговая энергия ионизации образующихся радикалов (SF_l , $l = 1, 2, 3, 4, 5$, NF_l , $l = 1, 2$ и SiH_l , $l = 1, 2, 3$) меньше потенциала ионизации молекул SF_6 , NF_3 и SiH_4 . Показано, что существующий в анодной фазе приэлектродного слоя двойной слой играет важную роль в поддержании как α -моды, так и δ -моды, однако, он не является причиной перехода ВЧ-разряда из α - в δ -моду.

2. Теоретические исследования ВЧ-разрядов

Проводящиеся многие годы интенсивные экспериментальные исследования плазмы, невозможны без теоретических исследований для создания научной основы физики плазмы. В работе Райзера Ю.П., Шнейдера М.Н., Яценко Н.А. [29] рассмотрена физика ВЧЕ-разряда, техника и практические методы эксперимента, диагностики, измерений при работе с высокочастотными разрядами, теория и численное моделирование разрядного процесса. Излагаются методы возбуждения ВЧ-поля в газе, даны основные сведения о структуре и формах существования ВЧ-разрядов. В работе [57] объяснены важнейшие для всей физики ВЧ-разряда и приложений факты возникновения приэлектродных слоев пространственного заряда и постоянного потенциала у ВЧЕ-плазмы, механизм протекания ВЧ-тока, современные приложения ВЧЕ-разряда для возбуждения CO_2 -лазеров и ионной обработки материалов, используемых в микроэлектронике. Попутно обсуждается вопрос о природе тока смещения и месте этого фундаментального

понятия в реальном механизме протекания переменного тока изолятора. В [58] на основе усредненного уравнения для профиля ионной концентрации анализируются процессы в приэлектродных слоях емкостного несамостоятельного ВЧ-разряда при средних давлениях. Получены аналитические выражения для распределения концентрации вблизи границы плазмы. В [59] на основании усредненного уравнения движения ионов анализируются приэлектродные слои самостоятельного ВЧ разряда при средних и высоких давлениях, когда движение заряженных частиц определяется их подвижностями, а энергия — локальным мгновенным значением электрического поля. Получены приближенные выражения для концентрации ионов и толщины слоя в α - и γ -режимах горения разряда, позволяющие определить основные характеристики приэлектродных слоев емкостного ВЧ-разряда при средних и высоких давлениях.

Плазма ВЧЕ-разряда подобна плазме тлеющего разряда. В [60–62] предложена аналитическая модель для оценки основных параметров коротких (без положительного столба) тлеющих разрядов, учитывающая рождение электронов, как в катодном слое, так и за счет нелокальной ионизации в плазме отрицательного свечения. Представлены выражения для основных характеристик тлеющего столба, а так же профили распределения концентрации плазмы.

Актуальными остаются и общие теоретические исследования, например, в работе [63] рассмотрен вопрос о критерии подобия газовых разрядов и получены общие параметры подобия, которые позволяют уменьшить число независимых параметров, определяющих внутренние характеристики плазмы. В [64] освещены такие вопросы, как условие самоподдержания газового разряда, неравновесность газоразрядной плазмы, ионизация при однократных электрон-атомных столкновениях в газоразрядной плазме, ионизация с участием возбужденных атомов. В [65] даны значения диффузии и подвижности ионов в некоторых газах, описаны экспериментальные методы измерения подвижности ионов, приведен способ нахождения коэффициента диффузии ионов в собственном газе, основанный на изучении распада

плазмы в случае, когда выполняются условия амбиполярной диффузии. В [66] рассматривается вопрос об отражении и проникновении поперечных электромагнитных волн в движущемся плазменном слое с резким передним фронтом, создаваемом в неподвижной среде за счет ионизирующих воздействий. При этом учитываются также столкновительные и рекомбинационные процессы, приводящие к распаду плазмы на некотором расстоянии от фронта ионизации. Получены аналитические выражения для частот и амплитуд волн, как внутри плазменного слоя, так и на выходе из него.

3. Математическое моделирование ВЧ-разрядов

Математическое моделирование различных процессов, протекающих в плазме и при взаимодействии плазмы с материалами, включает в себя несколько подходов: гидродинамическое приближение (модель сплошной среды), кинетическая модель и гибридные модели.

В гидродинамическом приближении предполагается, что плазма может быть описана в приближении сплошной среды. Численное моделирование газоразрядной плазмы в гидродинамическом приближении позволяет получить полные данные о пространственной структуре заряда. В [67] приводятся результаты численного моделирования тлеющего разряда в азоте в двумерной постановке для широкого диапазона давлений и токов. Показано существование стационарных анодных пятен с нормальной плотностью тока. Анализируются влияние диффузионных процессов на параметры анодного слоя. Для более адекватного описания пространственных неоднородностей была использована следующая нестационарная модель разряда, учитывающая как поперечные, так и продольные составляющие диффузионных процессов:

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} \Gamma_e &= n_e (\alpha - \beta n_+), \quad \Gamma_e = -D_e \nabla n_e + n_e \mu_e \nabla \varphi, \\ \frac{\partial n_+}{\partial t} + \operatorname{div} \Gamma_+ &= n_e (\alpha - \beta n_+), \quad \Gamma_+ = -D_+ \nabla n_+ - n_+ \mu_+ \nabla \varphi, \\ \Delta \varphi &= -4 \pi e (n_+ - n_e), \quad j = e (\Gamma_+ - \Gamma_e),\end{aligned}$$

где n_e и n_+ – концентрация электронов и ионов соответственно, μ_e , μ_+ и D_e , D_+ – их коэффициенты подвижности и диффузии; φ – потенциал электри-

ческого поля, j – плотность тока, α – частота ионизации, β – коэффициент электронной рекомбинации.

Граничные условия были выбраны следующим образом:

$$\begin{aligned} \varphi &= 0, \quad \Gamma_+ \nu = 0, \quad n_e = \sigma \Gamma_e \nu \quad \text{на аноде}, \\ \varphi &= -U, \quad U = \text{const} > 0, \quad \frac{\partial n_+}{\partial \nu} = \left(\Gamma_e + \frac{\mu_e \Gamma_+}{\mu_+} \right) = 0 \quad \text{на положительном столбе}, \\ \frac{\partial n_e}{\partial \nu} &= \frac{\partial n_+}{\partial \nu} = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на оси и боковой поверхности разряда}, \end{aligned}$$

где ν – единичный вектор внешней нормали на рассматриваемых поверхностях, $\sigma = 2(1+p)(1-p) / \left(8 k T_e / (\pi n_e) \right)^{1/2}$, T_e – электронная температура, p – вероятность отражения электронов, на ряде металлов (вплоть до самых малых энергий), $p \sim 0.1 \div 0.3$. Граничные условия на боковых поверхностях обеспечивают условия непротекания ионного и электронного тока. Приведенные результаты соответствуют осесимметричной геометрии с равномерным разбиением сетки.

Для численного решения системы уравнений (уравнения баланса электронов, ионов и уравнение Пуассона) использовались неявные конечно-разностные схемы второго порядка аппроксимации по пространственной переменной и первого порядка по времени. На каждом временном шаге нелинейные уравнения решались неявным двухслойным итерационным методом с выбором оптимального итерационного параметра. Выбор оператора Лапласа в качестве разрешающего позволил применить метод полной редукции. На каждом шаге по времени проводились итерации по нелинейности. Сходимость итерационного процесса удалось повысить переходом к полностью неявной форме вычисления. Приведенные расчеты показывают относительную самостоятельность анодного слоя и существование закона нормальной плотности тока на аноде.

В [68] проводилось моделирование тлеющего разряда, сходного по своим характеристикам с ВЧЕ-разрядом. Моделирование плоского разряда в азоте проводится в рамках диффузионно-дрейфового приближения

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} - \text{div} (n_e \mu_e E) - D \frac{\partial^2 n_e}{\partial x^2} = \alpha n_e \mu_e E - \beta n_e n_+ + Q,$$

$$\frac{\partial n_+}{\partial t} + \operatorname{div} (n_+ \mu_+ E) = \alpha n_e \mu_e E - \beta n_e n_+ + Q,$$

$$\operatorname{div} (\nabla \varphi) = 4 \pi e (n_e - n_+), \quad E = -\nabla \varphi.$$

Здесь ось x направлена вдоль, а ось y – перпендикулярно поверхности электродов, Q – скорость внешней ионизации, β – коэффициент диссоциативной рекомбинации, E – напряженность электрического поля.

В модели учитывается только диффузия электронов с коэффициентом вдоль электрода. Вторичные электроны на катоде рождались за счет ионно-электронной эмиссии с коэффициентом γ , т.е.

$$n_e \Big|_{y=0} = \gamma (n_+ \mu_+ / \mu_e) \Big|_{y=0}, \quad \varphi \Big|_{y=0} = 0, \quad \varphi \Big|_{y=d} = U.$$

На боковых стенках разрядной камеры ставилось условие непротекания тока:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \Big|_{x=0, L} = 0, \quad \frac{\partial n_+}{\partial x} \Big|_{x=0, L} = 0, \quad \frac{\partial n_e}{\partial x} \Big|_{x=0, L} = 0.$$

На аноде плазма считалась квазинейтральной:

$$n_e \Big|_{y=d} = n_+ \Big|_{y=d}.$$

Ионизация задавалась таунсендовской зависимостью. Исследованы условия формирования в поднормальном режиме поперечной структуры разряда на катоде в виде многих пятен. Показано что разряд с многими пятнами является трехмерным, а не двумерным объектом.

В [69] представлен метод численного моделирования нестационарных уравнений переноса ионосферной плазмы в дрейфующих дипольных плазменных трубках произвольного размера. В исходных уравнениях учитываются процессы образования и потерь ионов, амбиполярная диффузия плазмы вдоль геомагнитных силовых линий, взаимодействие с горизонтальным атмосферным ветром и поперечный дрейф плазмы под действием электрического поля магнитосферной конвекции. Описан способ преобразования дифференциальных уравнений к консервативной форме. Для решения модельных уравнений с заданными граничными условиями предложена устойчивая разностная схема, реализуемая алгоритмом встречных

поточковых прогонок. Представлены результаты моделирования вариаций концентрации электронов в ионосфере и плазмосфере.

В статье [70] приведены результаты численных экспериментов, когда ВЧЕ-разряд сосуществует в двух формах (в α - и γ -формах) при одних и тех же граничных условиях. Модель представлена следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} \Gamma_e &= \alpha |\Gamma_e| - \beta n_e n_+, & \frac{\partial n_+}{\partial t} + \operatorname{div} \Gamma_+ &= \alpha |\Gamma_e| - \beta n_e n_+, \\ \operatorname{div} E &= 4\pi (n_e - n_+), & E &= -\nabla \varphi.\end{aligned}$$

Здесь α – коэффициент ударной ионизации молекул электронами (первый коэффициент Таунсенда); β – коэффициент ион-электронной рекомбинации, $\Gamma_{e,x}$ – проекция вектора плотности потоков электронов на ось x . Граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\Gamma_{e,x}\Big|_{x=0} &= \gamma \Gamma_{+,x}\Big|_{x=0}, & \varphi\Big|_{x=0} &= 0, & n_+\Big|_{x=H}, & \varphi\Big|_{x=H} &= V, \\ \frac{\partial n_e}{\partial r}\Big|_{r=0} &= \frac{\partial n_+}{\partial r}\Big|_{r=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\Big|_{r=0} &= 0, \\ 1) n_e\Big|_{r=R} &= n_+\Big|_{r=R} = 0, & \varphi\Big|_{r=R} &= \frac{V}{H} x\end{aligned}$$

или

$$2) \frac{\partial n_e}{\partial r}\Big|_{r=R} = \frac{\partial n_+}{\partial r}\Big|_{r=R} = \frac{\partial \varphi}{\partial r}\Big|_{r=R} = 0.$$

Здесь γ – коэффициент ионно-электронной эмиссии с поверхности катода; V – падение напряжения на разрядном промежутке. Для нахождения V были привлечены условия во внешней цепи. В условиях установившегося процесса горения тлеющего разряда можно записать очевидное соотношение $\frac{\varepsilon - V}{e R_0} = 2\pi \int_0^R \Gamma_{e,x}(r, x = H) r^m dr$, означающее равенство суммы падений напряжений на сопротивлении R_0 и в разрядном промежутке электродвижущей силы ε . При этом значение $m = 0$ соответствует плоскому случаю, а $m = 1$ – цилиндрическому. Путем численных экспериментов показано, что в широком диапазоне параметров тлеющего разряда тип граничных условий не оказывает существенного влияния на результаты расчетов.

В статье [71] представлена модель ВЧЕ-разряда, включающая в себя уравнения непрерывности для электронов и ионов, уравнение Пуассона и уравнение для энергии электронов:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n_+}{\partial t} + \operatorname{div} (n_+ v_+) &= n_e N k_+, \quad n_+ v_+ = n_+ \mu_+ E - D_+ \nabla n_+, \\
\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} (n_e v_e) &= n_e N k_+, \quad n_e v_e = n_e \mu_e E - D_e \nabla n_e, \\
\frac{\partial (n_e \varepsilon_e)}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{5}{2} n_e \varepsilon_e v_e + q_e \right) &= -n_e v_e e E - n_e N k_L, \\
q_e &= -\frac{2}{3} k \nabla \varepsilon_e, \quad k = \frac{5}{2} D_e n_e, \quad E = -\nabla \varphi, \quad k_L = e \frac{5}{2} (\mu_e E^2), \\
\operatorname{div} \nabla \varphi &= -\frac{e}{\varepsilon_0} (n_+ - n_e).
\end{aligned}$$

Здесь k_+ – коэффициент ионизации, N – концентрация нейтральных атомов, ε_e – энергия электронов, e – заряд электрона, ε_0 – электрическая постоянная, E – напряженность электрического поля. Все основные коэффициенты аппроксимировались зависимостями от E/N . Расчеты производились при частоте генератора 13.56 МГц, амплитуде напряжения 100 В и давлении 100 мТор. Результаты расчетов показали качественное согласие с экспериментальными данными.

В работе [35] проведено моделирование ВЧЕ-разряда в аргоне при межэлектродном расстоянии 2.54 см, давлении 1 тор, постоянной газовой температуре, равной 300 К, амплитудах напряжений, равных 50 В и 100 В. Учитывалось влияние метастабильных атомов, концентрацию которых будем обозначать через n_* . Модель включает в себя следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} \Gamma_e &= n_e N k_i + n_e n_+ k_i + k_{mp} n_+^2, \\
\frac{\partial n_+}{\partial t} + \operatorname{div} \Gamma_+ &= n_e N k_i + n_e n_+ k_{si} + k_{mp} n_+^2, \\
\frac{\partial n_*}{\partial t} + \operatorname{div} \Gamma_* &= n_e N k_{ex} - n_e n_+ k_{si} - n_e n_+ k_{sc} - \\
&\quad - n_e n_+ k_r - 2 k_{mp} n_+^2 - n_+ N k_{2q} - k_{3q} N^2 n_+, \\
\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{3}{2} k n_e T_e \right) + \operatorname{div} q_e - e \Gamma_e \nabla \varphi + \sum_l H_l R_l &= 0,
\end{aligned}$$

$$\operatorname{div} \nabla \varphi = -\frac{e}{\varepsilon_0} (n_+ - n_e),$$

где $k_i, k_{si}, k_{mp}, k_{ex}, k_{sc}, k_r, k_{2q}, k_{3q}$ – константы соответствующих процессов, H_i – количество энергии выделяемой или затраченной в соответствующем процессе, R_l – численное значение соответствующего процесса при $l = i, si, mp, ex, sc, r, 2q, 3q$, $\Gamma_e = -D_e \nabla n_e + n_e \mu_e \nabla \varphi$, $\Gamma_+ = -D_+ \nabla n_+ - n_+ \mu_+ \nabla \varphi$, $K_e = \frac{5}{2} D_e n_e$, $q_e = -K_e \nabla T_e + \frac{5}{2} k T_e \Gamma_e$, $\Gamma_* = -D_* n_*$, T_e – электронная температура, D_* – коэффициент диффузии метастабильных атомов.

Кроме того, предполагаются выполненными граничные условия

$$\Gamma_e = \pm k_s n_e - \gamma \Gamma_+ \text{ при } x = 0, L, \quad \Gamma_+ = -n_+ \mu_+ \nabla \varphi \text{ при } x = 0, L,$$

$$n_+ = 0, T_e = 0 \text{ при } x = 0, L,$$

$$\varphi = 0 \text{ при } x = 0, \varphi = V_{rf} \sin(2\pi f t) = 0 \text{ при } x = L,$$

где V_{rf} – амплитуда напряжения, f – частота генератора. Расчеты по данным моделям проведены при небольших межэлектродных расстояниях $1 \div 10$ см.

Следует отметить, что близкие к вышеизложенным моделям рассматривались также в [29].

Методам построения сеточных схем для уравнения диффузии с конвекцией и их решению уделяется большое внимание. Это связано с большим количеством приложений для таких уравнений в различных областях знаний и трудностями, которые возникают при их численном решении. Разработано множество подходов к построению неосцилляционных схем высокого разрешения, которые во многих случаях позволяют хорошо воспроизводить те или иные особенности решений. Среди критериев, определяющих качество конструируемых схем, выделяют их консервативность. Подходы, положенные в основу методик конструирования сеточных схем для указанных задач, как правило, основаны на балансных соотношениях, следующих из исходного дифференциального уравнения, и их аппроксимации. Разнообразие подходов определяется, главным образом, методами аппроксимации и способами коррекции потоковых слагаемых. Одной из причин

коррекции этих слагаемых, наряду с их влиянием на устойчивость, схемные вязкость, дисперсию и т. п., как нам представляется, является необходимость устранения противоречий между естественным желанием воспроизвести с высокой точностью решение исходной задачи, включая разрывные решения, непрерывной зависимостью функции потока от неизвестной функции и требованием консервативности сеточной схемы. При этом в основном используют различные эмпирические подходы, а также подходы, основанные на использовании дополнительных соотношений, являющихся следствием исходных дифференциальных уравнений или дополнительных законов сохранения [72–77].

Кроме численного расчета основных характеристик, большой интерес представляет моделирование взаимодействия плазмы с материалами. Так в работе [78] построена модель, описывающая процесс роста пленки аморфного кремния из ВЧ-разрядной силановой плазмы. Численное моделирование рассматриваемой задачи проводилось в следующей постановке. Рассматривались процессы, проходящие между двумя параллельными электродами, разнесенными на расстояние L . Внутри этой области решалась система уравнений $\frac{\partial n_i}{\partial t} = D_i \frac{\partial^2 n_i}{\partial x^2} + F_i$, где

$$F_i = \sum_j n_j \left(n_e k_{ji} + \sum_l K_{jli} n_l \right) - n_i \sum_j \left(n_e C K_{ij} + \sum_l K_{jli} n_l \right).$$

Здесь k_{ji} – константы скорости процессов, индуцированных электронным ударом, K_{jli} – константы скоростей химических процессов, значения которых брались на основании экспериментальных данных, n_i – концентрация i -й компоненты. С помощью численного решения системы уравнений химической кинетики в [78] проанализированы роль различных компонент и влияние основных параметров разряда на процесс роста пленки.

При моделировании процессов взаимодействия плазмы с поверхностью и межслойными пространствами зачастую используется прямое статистическое моделирование кулоновских столкновений. Так в работе [79] из экспериментальных данных по пробую и рассчитанных методом Монте-Карло (МК) чисел ионизации электронами найдены обобщенные коэффициенты

вторичной катодной эмиссии γ в водороде. Полученные методом МК частота ионизации и скорости дрейфа электронов неплохо согласуются с измерениями. При реализации метода МК промежуток делился на 50 слоев. С катода последовательно выпускались $5 \cdot 10^3 \div 10^4$ электронов. Их движение с учетом разного типа столкновений с молекулами моделировалось вплоть до полного исчезновения на электродах вместе с потомками. Полное число ионизации находилась из расчета на один электрон путем подсчета всех актов ионизации во всех слоях, произведенных каждым выпущенным электроном и его потомками, с последующим усреднением по исходным электронам.

В [80] для расчета молекулярных течений в наносистемах создана статистическая модель шероховатости поверхности, основанная на представлении ее неровностей в виде набора плоских микроплощадок, соединяющих краями между собой и имеющих нормали, отличные от нормали к среднему уровню. В результате статистической обработки экспериментальных данных получено распределение для вспомогательной величины, которое оказалось очень удобно для численных статистических расчетов. Полученные результаты могут использоваться для моделирования граничных условий методом МК, а также для оценки свойств новых материалов защитных покрытий поверхностей в наносистемах, содержащих течения газа.

В [81] представлены результаты экспериментов, проводимых с целью исследования процессов эмиссии электронов с граничных поверхностей объектов, облучаемых ионизирующим излучением. Пластина (образец) облучается фотонным потоком. Между источником и образцом расположен магнитный сепаратор. Измерения прошедшего сквозь объект излучения проводится с помощью полупроводникового кремневого детектора с площадью чувствительной области $0.01 \text{ м} \times 0.01 \text{ м}$ и толщиной чувствительного слоя $\sim 0.0003 \text{ м}$. Измеряемой величиной является число импульсов $F_d(E)$, где E – энергия, потерянная излучением при прохождении чувствительного слоя детектора. Для получения искомой величины вклада эмитируемых из объектов электронов в результата измерения, проводится измерение

"фотонного" вклада $F_{ph}(E)$ путем выполнения опыта без образца. Затем проводится эксперимент с образцом, то есть измеряется величина $F_d(E)$. Разность значений измеряемой величины в опытах принимается в качестве искомой величины – вклада электронов эмиссии $F_e(E) = F_d(E) - F_{ph}(E)$. Далее показано, что вклад электронов эмиссии $F_e(E, E_0)$ от монохроматического источника фотонов с энергией E_0 в измеряемую величину равен $F_e(E, E_0) = \int G_p^e(E, E') \delta(E_0 - E') dE' = G_p^e(E, E_0)$, где E – суммарные энергетические потери прошедших сквозь объект фотонов и эмитирующих электронов в детекторе (измеряемая величина), а E' – энергия излучения источника, $G_p^e(E, E')$ – энергетические потери электронов эмиссии в детекторе, $\delta(E - E')$ – исходный спектр фотонов, облучающих образец.

С учетом, того, что суммарный вклад всех типов излучения от указанного источника есть $F_p(E, E_0) = \int G_p(E, E') \delta(E_0 - E') dE' = G_p(E, E_0)$, относительный электронный вклад ΔF_e может быть вычислен по формуле

$$\Delta F_e = \frac{\int F_e(E, E_0) dE}{\int F_p(E, E_0) dE} G_p(E, E') = \int dE'' P \delta(E - E') A \delta(E - E'),$$

где здесь A – преобразование исходного спектра $f(E)$ в спектр, измеряемый детектором $\varphi(E) \rightarrow Af(E)$, а P – преобразование спектра, измеряемого детектором $\varphi(E)$, в энергетическое распределение измеряемой величины $F(E)$: $F(E) \rightarrow P\varphi(E)$. После измерения вклада от неравновесных фотонов $F_n(E, E')$ может быть вычислен вклад от рассеянного излучения $F_z(E, E') = F_d(E, E') - F_e(E, E') - F_n(E, E')$. Также в указанной работе определены условия адекватной экспериментальной оценки спектра эмитируемых электронов $\Delta F_{se}(E_0) = \int F_s(E, E_0) dE / \int F_e(E, E_0) dE < 1$.

Разработаны алгоритмы компьютерного моделирования процессов радиационной эмиссии электронов. Предложен метод численного построения ядра интегрального уравнения для реконструкции спектра излучения источника. Задан источник рентгеновского излучения с модельным спектром $f(E)$. Алюминиевая пластинка облучается выходящим из источника потоком фотонов $\varphi(E)$ регистрируется кремниевым детектором, обозначим

результат через $F(E)$, тогда $F_e = \int dE' G_p(E, E') f(E')$. Сравнительный анализ результатов моделирования и экспериментальных данных показал применимость разработанных методов для математического сопровождения рассматриваемых экспериментов.

Кроме прямого статистического моделирования кулоновских столкновений кинетическое моделирование плазмы включает в себя модели на основе стохастических дифференциальных уравнений, так же модели, учитывающие изменение функции распределения во времени, описываемое уравнением Больцмана. В [82] представлена математическая модель переноса электронного каскада. Она разработана для исследования предпробойной стадии газового разряда на основе кинетического уравнения для электронов в самосогласованном электромагнитном поле. Учитывается упругое рассеяние электронов, возбуждение молекул электронным ударом и ионизация. В качестве начального распределения свободных электронов использован естественный фон ионизации. Результаты вычислительного эксперимента сопоставлены с данными измерений дрейфовой скорости и средней энергии электронов разряда, а также коэффициента Таунсенда в плоском заряженном конденсаторе, заполненном разреженным ксеноном. Сравнение показало, что модель не противоречит эксперименту. Для сокращения объема вычислений полного тока разряда построено транспортное приближение. Оно основано на усреднении углового рассеяния. Исследована применимость транспортного приближения для моделирования полного тока капиллярного разряда.

В работе [83] рассматривается метод МК прямого статистического моделирования кулоновских столкновений в случае двухкомпонентной плазмы. В работе рассматривается релаксация системы, состоящей из двух сортов частиц с разными массами и разными начальными температурами, к равновесному распределению Максвелла. Представлены результаты моделирования релаксации изотропного начального распределения для двухкомпонентной плазмы, состоящей из электронов и ионов, методом МК. Предполагается, что количество модельных частиц каждого сорта одинаково. В це-

лях проверки подхода, методики и работы алгоритма произведены расчеты зависимости моментов ионной и электронной функции распределения от времени для основных расчетных параметров. Результаты моделирования сравниваются с численными расчетами, основанными на полностью консервативных разностных схемах для уравнения Ландау-Фоккера-Планка.

В [84] проведены компьютерные эксперименты по моделированию движения ансамбля электронов в гелии в однородных электрических полях. В основе расчетов лежит следующая модель: в газоразрядной трубке между анодом и катодом находится газ(гелий) с заданным давлением, электрическое поле во всем газоразрядном промежутке однородно и направлено перпендикулярно плоскостям поверхности электродов, с катода с заданной функцией распределения эмитируются электроны, которые под действием электрического поля дрейфуют к аноду, испытывая три вида соударений с атомами газа: упругие, возбуждающие, ионизирующие. В данной работе в качестве метода расчета кинетических характеристик был выбран метод МК. Основа метода- моделирование движения отдельных электронов лавины в газе в электрическом поле. Учет столкновений проводился при помощи техники нулевых сечений. Расчет методом МК дает устойчивые значения параметров электронного ансамбля, хорошо согласующиеся с экспериментом. Полученные данные могут быть применены при верификации приближений при решении уравнения Больцмана другими методами.

Наиболее распространенными методами решения данного класса задач являются метод Монте-Карло(MCC- Monte Carlo Collision), метод "частица в ячейке"(PIC-particle-in-cell method) и метод прямого моделирования разработанный Г. Бердом. Однако этот метод требует значительных затрат вычислительных ресурсов, требует знания физических констант в законах межмолекулярных взаимодействий и релаксационных процессов при соударениях молекул.

Гибридные модели представляют собой комбинацию кинетической и гидродинамической модели. В работе [85] методами спектроскопии КАРС (когерентное антистоксово рассеяние света) и оптической интерферометрии

измерена поступательная температура в плазме тлеющего и контрагированного разряда. Плотность тока в разряде определена из измерений концентрации электронов методами оптической интерферометрии и эмиссионной спектроскопии. Функции распределения молекул азота по колебаниям и вращательным уровням в основном электронном состоянии и электронов по энергии, а также зависимость температуры газа от времени определялись численно на основе модели, включающей однородное уравнение Больцмана и уравнения баланса для концентрации заряженных и возбужденных частиц и температуры газа. В работе [86] с помощью коммерческого пакета CFDRC software, позволяющего проводить симуляции в произвольной 3D-геометрии с использованием уравнения Пуассона для распределения потенциала, fluid уравнений для тяжелых компонентов и решения нелокального кинетического уравнения для электронов проведено самосогласованное моделирование плазмы положительного столба DG-разряда в аргоне при средних давлениях. В [87] сформирована математическая модель, описывающая динамику ионизированной плазмы вблизи плоского зонда. В невозмущенную бесконечно протяженную плазму, состоящую из электронов и однозарядных ионов, внесена большая заряженная до потенциала φ_p плоскость. Плоскость расположенная поперек потока плазмы, является идеально поглощающей для электронов, ионы при ударе о плоскость нейтрализуются. Влияние магнитного поля не учитывается. Концентрации ионов и электронов, а также температуры данных частиц в невозмущенной плазме заданы. За начальные функции распределения обоих типов частиц принимаются функции распределения Максвелла. Математическая модель включает уравнение Фоккера-Планка и уравнение Пуассона. Предложены два подхода к решению задачи. Первый метод основывается на методе статистических испытаний МК. В нем вначале находят значения напряженности электрического поля по значениям потенциала, полученным из граничной задачи для уравнения Пуассона. Граничную задачу для уравнения Пуассона предлагается решать конечно-разностной схемой с последующем ее решением методом прогонки. Далее, с использованием найденных значе-

ний напряженности, решается уравнение Фоккера-Планка путем перехода к стохастическому дифференциальному уравнению (СДУ) ИТО, используемые интегральные выражения решаются методом МК. Концентрации частиц и плотности токов частиц на зонд вычисляются согласно описанному методу МК. Во втором методе уравнение Фоккера-Планка разбивается на две подзадачи. Первая из вспомогательных задач отвечает за перенос частиц, представляет собой систему безразмерных уравнений Власова-Пуассона. Для ее решения применяется метод крупных частиц. Согласно данному методу, решение задачи осуществляется путем расщепления на два этапа: на первом этапе не учитываются конвективные члены и решение получается обычным интегрированием на неподвижной эйлеровой сетке, на втором этапе рассматривается система, которая описывает перенос частиц в лагранжевой системе координат. Кроме того, на первом этапе необходимо решить уравнение Пуассона для получения значений потенциала самоогласованного поля, которое решается как в первом методе. Вторая задача решается путем перехода к конечно-разностной системе. К полученной системе разностных уравнений предлагается применить один из классических методов решения линейных уравнений- метод Гаусса. Из проведенных вычислительных экспериментов вытекает, что искомые величины – напряженность электрического поля, плотности потоков частиц на зонд, концентрации частиц вблизи зонда совпадают как по характеру зависимости, так и по числовым значениям. При применении метода МК момент установления наступает быстрее по сравнению с конечно-разностным методом, однако конечно-разностный метод позволяет получить более наглядные результаты.

Заключение

Оценки элементарных процессов в плазме высокочастотных ВЧ-разрядов пониженного давления, приведенные в работе [16], показывают, что математическая модель ВЧЕ-разряда пониженного давления может быть удовлетворительно описана в приближении сплошной среды. В результате анализа изложенных математических моделей ВЧЕ-разряда пониженного дав-

ления установлено, что они не дают полного описания состояния плазмы в плазмотроне с большим межэлектродным расстоянием. Для определения диапазона устойчивого горения ВЧЕ-разряда пониженного давления в плазмотроне с большим межэлектродным расстоянием математическая модель должна включать в себя уравнения непрерывности для электронного и ионного газа, уравнение Пуассона для распределения потенциала электрического поля, уравнение баланса метастабильных атомов, уравнение электронной теплопроводности, уравнение теплопроводности атомно-ионного газа с соответствующими краевыми и начальными условиями. В силу сказанного численное моделирование взаимодействия ВЧЕ-плазмы пониженного давления требует объединения идей, изложенных во многих работах. Требуется не только применение суперкомпьютеров, но и разработка эффективных численных методов, учитывающих специфику каждой из задач, входящих в исследуемую математическую модель низкотемпературной плазмы.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 11-01-00864 и Минобрнауки РФ (госконтракт от 06.09.2010 г. № 14.740.11.0080).

Список литературы

- [1] *Оулет Р., Барбье М. и др.* Технологическое применение низкотемпературной плазмы. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 144 с.
- [2] *Моссе А.Л.* Стационарные и мобильные плазменные установки для переработки токсичных отходов // Межд. научная конференция "Плазменные технологии исследования, модификации и получения материалов различной природы": сборник материалов. – Казань: Изд-во КНИТУ, 2012. – С. 16-19.
- [3] *Бурдикова Т.В.* Плазмохимическая модификация металлических порошков для Энергонасыщенных конденсированных систем // Межд. научная конференция "Плазменные технологии исследования, моди-

- фикации и получения материалов различной природы": сборник материалов. – Казань: Изд-во КНИТУ, 2012. – С. 24–30.
- [4] *Моссе А.Л., Буров И.О.* Обработка дисперсионных материалов в плазменных реакторах. – Минск: Наука и техника, 1980. – 205 с.
- [5] *Кудинов В.В., Корнеева Н.В.* Композиционные материалы, упроченные волокнами, обработанными ВЧ-плазмой // Межд. конференция "Физика высокочастотных разрядов": материалы конференции. – Казань: Изд-во КНИТУ, 2011. – С. 35.
- [6] *Рыбкин В.В.* Низкотемпературная плазма как инструмент модификации поверхности полимерных материалов // Соросовский образовательный журнал. – 2000. – Т. 6, № 3.
- [7] *Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н.* Моделирование высокочастотного емкостного разряда при больших межэлектродных расстояниях. I. Постановка задачи // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, № 2. – С. 123–130.
- [8] *Желтухин В.С., Соловьёв С.И., Соловьёв П.С., Чебакова В.Ю.* Вычисление минимального собственного значения нелинейной задачи Штурма-Лиувилля // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2013. – Т. 155, № 3. – С. 91–104.
- [9] *Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н.* Тематическая модель ВЧЕ-разряда в аргоне при больших межэлектродных расстояниях // Вестник Казанского технологического университета. – 2013. – Т. 16, № 22. – С. 334–338.
- [10] *Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Шнейдер М.Н.* Моделирование ВЧЕ-разряда при больших межэлектродных расстояниях // В сборнике: Сеточные методы для краевых задач и приложения Материалы Девятой Всероссийской конференции, Казань: Отечество, 2012. – С. 183–186.

- [11] *Шалимов В.В., Беспалов Е.Б., Зорин Г.А., Кандиболотская Т.Б.* Исследование стойкости слоистых материалов к действию электрических разрядов // Журнал технической физики. – 1993. – Т. 63, Вып. 9. – С. 185–190.
- [12] *Салихов Р.Б., Лачинов А.Н., Корнилов В.М., Рахмеев Р.Г.* Свойства транспортного слоя, сформированного на границе раздела двух полимерных пленок // Журнал технической физики. – 2009. – Т. 79, Вып. 4. – С. 131–135.
- [13] *Зайнутдинов А.Х., Магруппов М.А.* Коэффициенты переноса в композитах // Журнал технической физики. – 1993. – Т. 63, Вып. 9. – С. 53–64.
- [14] *Бычков В.Л.* об электрическом заряде полимерных сеток // Журнал технической физики. – 1993. – Т. 63, Вып. 2. – С. 152–159.
- [15] *Тихонова Н.В., Желтухин В.С., Чебакова В.Ю., Бородаев И.А.* Математическая модель высокочастотной плазменной обработки многослойных материалов заготовки верха обуви // Вестник Казанского технологического университета. – 2012. – Т. 15, № 17. – С. 36–39.
- [16] *Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Кашапов Н.Ф.* Высокочастотная плазменно-струйная обработка материалов при пониженных давлениях. Теория и практика применения. – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 2000. – 348 с.
- [17] *Джанбекова Л.Р., Шаехов М.Ф.* Изучение характеристик ВЧ-разряда пониженного давления, применяемого для обработки натуральных волокон и нетканых материалов на их основе // Межд. научная конференция "Плазменные технологии исследования, модификации и получения материалов различной природы": сборник материалов. – Казань: Изд-во КНИТУ, 2012. – С. 24–30.
- [18] *Абдуллин И.Ш., Махоткина Л.Ю., Тихонова Н.В., Христюбова В.И.* Исследование потребительских характеристик обуви из нано-

модифицированной натуральной кожи // Межд. научная конференция "Плазменные технологии исследования, модификации и получения материалов различной природы": сборник материалов. – Казань: Изд-во КНИТУ, 2012. – С. 287–288.

- [19] *Нуриев И.М., Шарифуллин Ф.С., Абдуллин И.Ш.* Влияние плазмы ВЧ-разряда на процесс осветления волосяного покрова шубной овчины // VII международная научно-практическая конференция студентов и молодых ученых. – Казань, 2011. – 259 с.
- [20] *Абдуллин И.Ш., Махоткина Л.Ю.* Высокочастотная плазменная обработка в производстве обуви. Теория и практика использования. – Казань: Изд-во КНИТУ, 2006. – 348 с.
- [21] *Абдуллин И.Ш., М.А. Адакова, Л.Ю.Махоткина, Фукина О.В.* О возможности регулирования сорбционных свойств меха путем модификации ВЧ плазмой // Кожевенно-обувная промышленность. – 2009. – № 6. – С. 35–36.
- [22] *Абдуллин И.Ш., Сысоев В.А., Салимова А.И.* Применение низкотемпературной плазмы в технологии бесхромового дубления // Материалы Всероссийская научная конференция по физике низкотемпературной плазмы ФНТП-2004. – Петрозаводск, 2004. – С. 172–174.
- [23] *Абдуллин И.Ш., Желтухин В.С., Шаехов М.Ф.* Модификация натуральных кожевенных и меховых материалов с использованием высокочастотного разряда пониженного давления. – Энциклопедия низкотемпературной плазмы, серия Б "Справочные приложения, базы и банки данных" , тематический том XI "Прикладная химия плазмы" . – М.: Янус-К, 2006. – С. 119–159.
- [24] *Абдуллин И.Ш., Кудинов В.В., Шаехов М.Ф.* Высокочастотный разряд пониженного давления в процессах обработки натуральной кожи // Материаловедение. – 2004. – № 6(87). – С. 52–56.

- [25] *Абдуллин И.Ш., Красина И.В., Тихонова В.П., Шарифуллин Ф.С.* Модификация кератина шерсти потоком плазмы ВЧЕ-разряда пониженного давления // Материалы Всероссийской молодежной научно-практической конференции "Инновации в науке, технике, образовании и социальной сфере" . – Казань, 2003. – С. 140–141.
- [26] *Кумпан Е.В., Абдуллин И.Ш., Хамматова В.В., Разумев К.Э.* Влияние потока высокочастотной плазмы пониженного давления на формовочную способность текстильных материалов из шерстяных и синтетических волокон. – Казань: Изд-во КГТУ, 2008. – 135 с.
- [27] *Лупан Ю.А.* Об одной возможности уточнения результатов элементарной теории ВЧ-разряда в воздухе // Журнал технической физики. – 1976. – Т. 46, Вып. 11. – С. 2321–2326.
- [28] *Желтухин В.С.* О разрешимости одной нелинейной спектральной задачи теории высокочастотных разрядов пониженного давления // Известия вузов. Математика. – 1999. – № 5. – С. 26–31.
- [29] *Райзер Ю.П., Шнейдер М.Н., Яценко Н.А.* Высокочастотный емкостный разряд: Физика. Техника эксперимента. Приложения. - М.: Изд-во МФТИ, 1995. – 320 с.
- [30] *Леонтович М.А.* Вопросы теории плазмы. Выпуск 1. – М.: Госатомиздат, 1963. – 290 с.
- [31] *Днестровский Ю.Н., Костомаров Д.П.* Математическое моделирование плазмы. – М.: Наука, 1993. – 336 с.
- [32] *Дулькин А.Е., Мошкалева С.А., Смирнов А.С., Фролов К.С.* Исследования высокочастотного емкостного разряда низкого давления // Журнал технической физики. – 1993. – Т. 63, Вып. 7. – С. 64–73.
- [33] *Лисовский В.А., Харченко Н.Д.* Моделирование зажигания разряда низкого давления в комбинированных электрических полях // Вестник Харьковского национального университета. Серия физическая: ядра, частицы, поля. – 2010. – Т. 887, № 1(45). – С. 81–87.

- [34] *Ткачев А.Н., Феденев А.А., Яковленко С.И.* Коэффициент Таунсенда, кривая ухода и эффективность формирования пучка убегających электронов в аргоне // Журнал технической физики. – 2007. – Т. 77, Вып. 6. – С. 22–27.
- [35] *Dimitris P.Lymberopoulos and Demetre J.Economou.* Fluid simulations of glow discharge & Effect of metastable atoms in argon// J. Appl. Phys. – 15 April 1993. – V. 73, No. 8. – P. 3668–3679.
- [36] *Байсова Б.Т., Струнин В.И., Струнина Н.Н., Худайбергенов Г.Ж.* Абсолютные заселенности метастабильных состояний аргона в плазме высокочастотного разряда // Журнал технической физики. – 2003. – Т. 73, Вып. 8. – С. 30–33.
- [37] *Дятко Н.А., Ионих Ю.З., Мещанов А.В., Напартович А.П.* Исследование "темной фазы" на стадии развития положительного столба тлеющего разряда в аргоне // Физика плазмы. – 2005. – Т. 31, № 10. – С. 939–953.
- [38] *Смирнов Б.М.* Возбужденные атомы. – М.: Энергоиздат, 1982. – 232 с.
- [39] *Lauro-Taroni L., Turner M M. and Braithwaite N.St.J.* Analysis of the excited argon atoms in the GEC RF reference cell by means of one-dimensional PIC simulations // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2004. – V. 37. – P. 2216–2222.
- [40] *Струнин В.И., Струнина Н.Н., Байсова Б.Т.* Плотность метастабильных состояний атомов аргона в ВЧЕ-разряде аргон-силановой плазмы // Тезисы Всероссийской научной конференции "ФНТП-2004" . – Петрозаводск, 2004. – Т. 2. – С. 5–8.
- [41] *Лелевкин В.М., Кулумбаев Э.Б., Автаева С.В., Кайрыев Н.Ж., Скорняков А.В.* Функция распределения электронов по энергиям в газоразрядной плазме в ксеноне//Вестник КРСУ. - 2006. - Т. 6, № 5. - С. 82-91.

- [42] Голубовский Ю.Б., Кудрявцев А.А., Некучаев В.О., Порохова И.А., Цендин Л.Д. Кинетика электронов в неравновесной газоразрядной плазме. – СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 2004. – С. 29.
- [43] Богданов Е.А., Кудрявцев А.А., Цендин Л.Д., Арсланбеков Р.Р., Колобов В.И., Кудрявцев В.В. Влияние метастабильных атомов и нелокальности электронного распределения на характеристики положительного столба разряда в аргоне // Журнал технической физики. – 2004. – Т. 74, Вып. 6. – С. 35–42.
- [44] Badriev I.B. On the solving of variational inequalities of stationary problems of two-phase flow in porous media // Applied Mechanics and Materials. – 2013. – V. 392. – P. 183–187.
- [45] Badriev I.B., Banderov V.V., Zadvornov O.A. On the equilibrium problem of a soft network shell in the presence of several point loads // Applied Mechanics and Materials. – 2013. – V. 392. – P. 188–190.
- [46] Badriev I.B., Karchevskii M.M. Convergence of an iterative process in a Banach space // Journal of Mathematical Sciences. – 1994. – V. 71, № 6. – P. 2727–2735.
- [47] Badriev I.B., Shagidullin R.R. A study of the convergence of a recursive process for solving a stationary problem of the theory of soft shells // Journal of Mathematical Sciences. – 1995. – V. 73, № 5. – P. 519–525.
- [48] Badriev I.B., Zadvornov O.A., Lyashko A.D. A study of variable step iterative methods for variational inequalities of the second kind // Differential Equations. – 2004. – V. 40, № 7. – P. 971–983.
- [49] Бадриев И.Б., Карчевский М.М. Применение метода двойственности к решению нелинейных задач теории фильтрации с предельным градиентом // Дифференциальные уравнения. – 1982. – Т. 18, № 7. – С. 1133–1144.
- [50] Бадриев И.Б., Нечаева Л.А. Математическое моделирование установившейся фильтрации с многозначным законом // Вестник Пермско-

го национального исследовательского политехнического университета.
Механика. – 2013. – № 3. – С. 35–62.

- [51] *Калмыков А.В., Смирнов А.С., Уставщиков А.Ю.* Исследование комплексного сопротивления емкостного ВЧ разряда с внешними электродами // Журнал технической физики. - 1991. - Т. 61, Вып. 3. - С. 53-58.
- [52] *Алексеев И.А., Баранов Г.А., Борейшо А.С., Зинченко А.К., Лобачев В.В.* Оптическая однородность потока в емкостном высокочастотном разряде // Журнал технической физики. - 1993. - Т. 63, Вып. 8. - С. 99-106.
- [53] *Смирнов А.С., Уставщиков А.Ю., Фролов К.С.* Распределение по энергиям электронов и ионов, бомбардирующих электрод в высокочастотном разряде // Журнал технической физики. – 1995. – Т. 65, Вып. 8. – С. 64–73.
- [54] *Лисовский В.А.* Особенности $\alpha - \gamma$ -перехода в ВЧ разряде низкого давления в аргоне // Журнал технической физики. – 1998. – Т. 68, Вып. 5. – С. 52–60.
- [55] *Лисовский В.А.* Нормальный режим ВЧ-разряда в аммиаке // Вестник Харьковского университета, серия Физика, ядра, частицы, поля. – 2008. – № 823, Вып. 3/39. – С. 97–102.
- [56] *Лисовский В.А.* Диссоциативный режим ВЧ-емкостного разряда низкого давления // ФІП ФІП PSE. – 2006. – Т. 4, № 3-4. – С. 143 –168.
- [57] *Райзер Ю.П.* Высокочастотный емкостный разряд и его приложения // Соросовский образовательный журнал. – 1999. – № 8. – С. 90–96.
- [58] *Смирнов А.С., Цендин Л.Д.* Приэлектродные слои в несомостоятельном ВЧ-разряде // Журнал технической физики. – 1990. – Т. 60, Вып. 7. – С. 56–61.
- [59] *Смирнов А.С., Цендин Л.Д.* Приэлектродные слои в самостоятельном ВЧ-разряде среднего и высокого давления // Журнал технической физики. – 1991. – Т. 61, Вып. 3. – С. 64–73.

- [60] *Райзер Ю.П., Шнейдер М.Н.* Продольная структура катодных частей тлеющего разряда // Теплофизика высоких температур. – 1991. – Т. 29, Вып. 6. – С. 1041–1052.
- [61] *Кудрявцев А.А., Морин А.В., Цендин Л.Д.* Роль нелокальной ионизации в формировании коротких тлеющих разрядов // Журнал технической физики. – 2008. – Т. 78, Вып. 8. – С. 71–82.
- [62] *Райзер Ю.П.* Физика газового разряда. – Долгопрудный: Издательский Дом "Интеллект" , 2009. – 736 с.
- [63] *Баилов Н.Л., Панасюк Г.Ю., Тимофеев Н.А.* К вопросу о подобии газовых разрядов // Журнал технической физики. – 1990. – Т. 60, Вып. 11. – С. 209–211.
- [64] *Смирнов Б.М.* Моделирование газоразрядной плазмы // Успехи физических наук. – 2009. – Т. 179, Вып. 6. – С. 591–604.
- [65] *Смирнов Б.М.* Диффузия и подвижность ионов в газе // Успехи физических наук. – 1967. – Т. 92, Вып. 1. – С. 75–103.
- [66] *Степанов Н.С.* О прохождении электромагнитных волн через движущиеся ионизованные слои // Журнал технической физики. – 1995. – Т. 65, Вып. 7. – С. 125–133.
- [67] *Исламов Р.Ш.* Моделирование формирования анодного пятна в самостоятельном тлеющем разряде // Журнал технической физики. – 1991. – Т. 61, Вып. 7. – С. 12–15.
- [68] *Швейгерт В.А.* Катодный слой тлеющего несамостоятельного разряда в поднормальном режиме // Журнал технической физики. – 1993. – 1991. – Т. 63, Вып. 5. – С. 29–40.
- [69] *Тащилин А.В., Романова Е.Б.* Численное моделирование диффузии ионосферной плазмы в дипольном поле при наличии поперечного дрейфа // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, № 1. – С. 3–17.

- [70] *Суржиков С.Т.* Численный анализ структуры двух типов тлеющих разрядов // Физико-химическая кинетика в газовой динамике. – 2008. – Т. 7. – [http: // www.chemphys.edu.ru/pdf/2008-09-01-029.pdf](http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2008-09-01-029.pdf)
- [71] *Boeuf J.P., Pitchford L.C.* Two-dimensional model of a capacitively coupled RF-discharge and comparisons with experiments in the Gaseous Electronics Conference reference reactor// Physical review E. – 1995. – V. 51, № 2. – P. 1376–1390.
- [72] *Самарский А.А., Вабищевич П.Н.* Численные методы решения задач конвекции-диффузии. – М: Эдиториал УРСС, 1999. – 248 с.
- [73] *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. – 636 с.
- [74] *Федоренко Р.П.* Введение в вычислительную физику. – М.: Изд-во Московского физико-технического института, 1994. – 528 с.
- [75] *Липанов А.М., Карсканов С.А.* Неявный метод численного решения дифференциальных уравнений // Математическое моделирование. – 2013. – Т. 25, № 3. – С. 25–32.
- [76] *Воронин К.В., Лаевский Ю.М.* Схемы расщепления в смешанном методе конечных элементов решения задач теплопереноса // Математическое моделирование. – 2012. – Т. 24, № 8. – С. 109–120.
- [77] *Зверев В.Г., Гольдин В.Д.* Разностная схема для решении конвективно-диффузионных задач тепломассообмена // Вычислительные технологии. – 2002. – Т. 7, № 6. – С. 24–37.
- [78] *Горбачев Ю.Е, Затевахин М.А., Кагонович И.Д.* Моделирование роста пленок гидрированного аморфного кремния из ВЧ разрядной плазмы // Журнал технической физики. – 1996. – Т. 66, Вып. 12.- С. 89–100.
- [79] *Мокров М.С., Райзер Ю.П.* Применение метода Монте-Карло для нахождения коэффициентов ионизации и вторичной эмиссии и вольт-амперной характеристики таунсендовского разряда в водороде // Журнал технической физики. – 2008. – Т. 78, Вып. 4. – С.47–54.

- [80] Мемнонов В.П., Ульянов П.Г. Экспериментальная оценка параметров распределений для шероховатости поверхности в каналах наноразмеров // Журнал технической физики. - 2011. - Т. 81, Вып. 2. - С. 104-109.
- [81] Вязьмин С.О., Жогов А.Г., Жуковский М.Е., Лукьянова Е.Г., Подолько С.В., Потапенко А.И., Скачков М.В. Моделирование эксперимента по исследованию радиационной электронной эмиссии // Математическое моделирование. - 2012. - Т. 24, № 6. - С. 45–56.
- [82] Березин А.В., Воронцов А.С., Захаров С.В., Марков М.Б., Паротъкин С.В. Моделирование предпробойной стадии газового разряда // Математическое моделирование. - 2013. - Т. 25, Вып. 3. - С. 105–118.
- [83] Бобылев А.В., Потапенко И.Ф., Карпов С.А. Метод Монте-Карло для двухкомпонентной плазмы // Математическое моделирование. - 2012. - Т. 24, № 9. - С. 35–49.
- [84] Абрамов А.А., Мащенко А.И., Сэм М.Ф., Толмачев Г.Н. Расчет параметров электронного ансамбля в гелии при однородных электрических полях методом Монте-Карло // Журнал технической физики. - 1997. - Т. 67, Вып. 2. - С. 17–19.
- [85] Шахатов В.А., Гордеев О.А. Исследование плазмы тлеющего и контрагированного разряда в азоте методами спектроскопии КАРС, оптической интерферометрии и численного моделирования // Журнал технической физики. - 2005. - Т. 75, Вып. 12. - С. 56–68.
- [86] Богданов Е.А., Кудрявцев А.А. и др. Нелокальные явления в положительном столбе тлеющего разряда среднего давления // Журнал технической физики. - 2004. - Т. 74, Вып. 7. - С. 44–51.
- [87] Кудрявцева И.А., Пантелеев А.В. Применение статистического и конечно-разностного методов к решению задачи диагностики низкотемпературной плазмы плоским зондом с учетом кулоновских столкновений // Математическое моделирование. - 2010. - Т. 22, № 5. - С. 45–56.